

ПРИСТУПНА БЕСЕДА БОГДАНА ГАВРИЛОВИЋА

ЖАРКО МИЈАЈЛОВИЋ

Математички факултет, Универзитет у Београду,
E-mail: zarkom@matf.bg.ac.rs

Резиме: Размотрена је приступна беседа Богдана Гавриловића у Српској академији наука, *Проблем простора, хипер-простора и континуума.*

1. УВОД

Богдан Гавриловић, заједно са Михаилом Петровићем и Милутином Миланковићем, заслужан је за увођење модерне математике у Србији почетком 20. века. Као човек универзалног духа, своју науку није посматрао изоловано, већ у светлу других наука и културних тековина. О томе сведочи и његова приступна беседа (објављена у Академијином *Глас-у* 1926). Поред онда актуелних питања из математике, пре свега оних која се тичу њених основа, у беседи се осврће на тада најновије теорије из астрономије и физике. Упознат са делима Алберта Ајнштајна, Давида Хилберта и Артура Едингтона посматра, на пример, премисе Опште теорије релативности, космологије и квантне механике у контексту Риманове геометије, нове, неевклидске геометрије. За њега ова примена представља стварну потврду конзистентности Риманове геометрије. Јер ако нема Риманове геометрије, онда нема нити (добре) Опште теорије релативности. Дакле Риманова геометрија равноправна је еуклидској геометрији, то проистиче из њене суштинске примене у опису физичког простора и физичких феномена. Такође је занимљива Гавриловићева дискусија о математичкој бесконачности у контексту космологије и квантне механике.

2. БИОГРАФИЈА

Богдан Гавриловић рођен је у Новом Саду 1. јануара 1864. године по новом (Грегоријанском) календару. Тамо завршава гимназију као најбољи ђак, а затим као питомац српског добротвора Саве Текелије одлази на студије на Филозофском факултету Универзитета у Будимпешти, где стиче

диплому доктора математичких наука 1887. Исте године постављен је за професора Велике школе у Београду, од које 1905. настаје Београдски универзитет. У Београду остаје до смрти 1947, активан као универзитетски професор све до 1941.

У својим тридесетим годинама, пред крај 19. века објављује два обимна универзитетска уџбеника који имају и монографски карактер:

Аналитична геометрија (Београд, 1896), књига из аналитичке геометрије равни и пројективне геометрије (1896) у обиму од 930 страница.

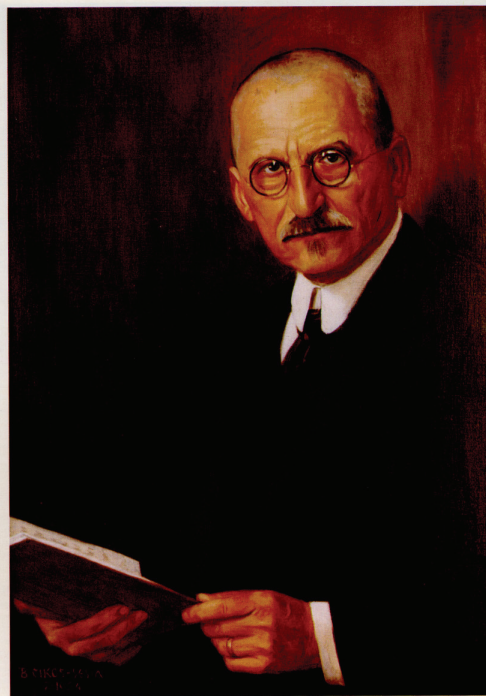
Теорија детерминаната (Београд, 1899), књигу из линеарне алгебре.

Обе књиге се могу сматрати капиталним математичким делима у Србији оног времена. Дело *Аналитична геометрија* је најобимнија и вероватно најбоља књига из геометрије која је штампана на српском. Академик Радивој Кашанин овако оцењује ове књиге: *Обе књиге чиниле би част свакој нацији, и многи народи, у то доба већи и срећнији од нас, нису тада таква дела имали.*

Почетком 20. века скоро целу деценију био је врло активан на научном плану, када је објавио двадесетак квалитетних радова углавном у часопису *Глас Српске академије наука и гласилу Рад Југославенске академије знаности и уметности из Загре-*

ба. Радови су из области алгебре (теорије бројева и линеарне алгебре), аналитичке геометрије и теорије функција. Тада је изабран и за члана Српске академије наука, 1901 за ванредног и већ 1905 за редовног члана и 1906 за члана ЈАЗУ. Касније, поред наведених дисциплина занимала су га и питања из основа, историје и филозофије математике.

Професор Гавриловић био је и одличан организатор научног рада на Београдском универзитету и у Академији. Битно је допринео прерастању



БОГДАН ГАВРИЛОВИЋ — портрет, рад Беле Чикоши — Сесије, 1924; уље на платну, 49×69,8 cm, Универзитет у Београду

Велике школе у Београдски универзитет, а касније као ректор подизању нивоа наставе и развоју Универзитета. Такође је у три мандата (1931-1937) био биран за председника Српске академије наука. Већ 1894. основао је Математичку библиотеку Математичког семинара Београдског универзитета, која је на жалост уништена крајем Другог светског рата. Заједно са Михаилом Петровићем и Милутином Миланковићем има велике заслуге за увођење модерне математике најпре на Великој школи, а потом и на Београдском универзитету. Одмах по оснивању Београдског универзитета бива постављен за редовног професора математике на Техничком факултету.

Академик Гавриловић био је носилац многобројних високих научних и друштвених функција и добитник значајних признања. Поред већ поменутих, био је члан друштва *Circolo matematico di Palermo, Dr. hon. causa* Универзитета у Атини, председник *Друштва Никола Тесла*. Био је први директор *Института Никола Тесла* који је основан 1939. Такође је један од оснивача *Математичког института* у Београду (1946).

Гавриловић је био еминентан просветни и културни радник који је размишљао и имао став о многим важним питањима из живота свога народа, политике, историје и филозофије. О томе сведоче његови многобројни чланци и беседе у разним важним приликама из београдског друштвеног и научног живота. Као припадник најужег београдског интелектуалног круга, допринео је стварању посебне атмосфере захваљујући којој Београд постаје један од центара научног рада. Радивој Кашанин, његов асистента и наследник на Катедри математике Техничког факултета, овако описује ту атмосферу:

Поред високе стручне спреме и оригиналних научних радова, сва тројица су се одликовала нечим што највише ценим, што сматрам за људску вредност највишег ранга: љубав према младим генерацијама, разумевање младих људи, несебичност и искрена помоћ младим, талентованим људима у њиховом напредовању. Умели су да се радују и да уживају кад се млади људи уздижу. Имао сам срећу да се развијам и радим поред њих, великих ауторитета науке и морала. Да се поносим њиховим пријатељством. Не верујем да је игде постојао такав амбијент какав су створили Гавриловић, Петровић и Миланковић.

3. ПРИСТУПНА БЕСЕДА

Мада је за редовног члана Академије изабран већ 1905, Гавриловић излаже своју приступну беседу тек 1926. године. Разлози за ову чињеницу нису сасвим јасни, тим пре што је своја главна научна дела написао пре свог избора у Академију. Како год било, овај спис представља свакако занимљиво виђење једног веома образованог математичара у то време па и сада актуелних питања математике и њихове релације према физичким теоријама од којих су неке онда тек настајале. Та питања пре свега се односе на појмове простора и бесконачности, чији један крај задире у филозофију,

други у људско схватање реалног света. Свему томе Гавриловић храбро прилази, анализира и даје своје виђење како се на њих може одговорити.

У беседи *Проблем простора, хипер-простора и континуума* коју је одржао 7. марта 1926 (по Грегоријанском календару), Гавриловић представља свој поглед на математику и разматра проблем заснивања неких основних математичких појмова. Све то илустрuje живим примерима из физике и других придружених теорија. То представљање иде у неколико праваца. У првом делу Гавриловић анализира појам простора у геометрији и то у еуклидској и Римановој геометрији и геометрији Лобачевског. Хвали интелектуалну храброст Лобачевског што одбацује 5. постулат (о паралелним правима) из Еуклидовога система аксиома, и на тај начин уводи једну другу геометрију исто толико тачну и непротивуречну као што је Еуклидова геометрија. Ево шта мисли о Римановој геометрији као математичком моделу физичког простора:

„Иако Риманова Геометрија изгледа парадоксална, ипак се зато нове теорије модерне физике у њезином систему развијају. Али и без тога, та геометрија, као идеални геометриски систем, представља модел геометрије коначног света.“

Гавриловић такође излаже како се проблем простора види у класичној (Њутновој) механици, али и у оквиру Ајнштајнове теорије релативности. Добро је упознат са савременим радовима из заснивања геометрије (Хилберта, Поенкареа, Минковског и других). Указује да је појава и изучавање нових геометрија нужна, не само зато што су оне логички непротивуречене еуклидској геометрији или су занимљиве са математичког становишта. Потврду за то види пре свега у Општој теорији релативности и у чињеници да се физички простор не може у потпуности описати еуклидским простором. Ево шта о томе на једном месту каже:

„Та механка¹ праксе је учинила, да је Ајнштајн у свом физикалном простору морао напустити Еуклидову геометрију и створити нову, не-Еуклидову, своју "природну" геометрију. Мерењем, т.ј. експерименталним путем утврдило се на име, да се у читавом једном низу појава и чињеница у Природи не може поставити ред у Еуклидову простору и да тај ред тражи, да време и простор сматрамо као нераздвајљиву целину. Та целина би била један реалан простор четирију димензија, а једна координата у томе простору би била време.“

Познат му је и пример коначних геометрија када спомиње "разгрананавање система од само 7 тачака који прикупља у једну систему све тачке простора". Вероватно под тим поразумева, мада експлицитно не помиње,

¹ Њутнова

коначан модел Gino Fano-a из 1892, такозване прве групе аксиома пројективне геометрије (аксиоме инциденције) у којој има укупно 15 равни од којих је свака инцидентна са 7 тачака и 7 правих.

У другом делу беседе Гавриловић се бави углавном Канторовом теоријом скупова, као универзалним оквиром за заснивање реалног континуума, анализе и геометрије. С тим у вези наводи многобројне проблеме и примере из кардиналне аритметике, као што су Континуум хипотеза (да је сваки бесконачан подскуп реалног континуума еквивалентан скупу природних бројева или скупу реалних бројева), или пример Пеанових кривуља помоћу којих се ивица датог квадрата може непрекидно пресликати на цео квадрат.

Још једна тема прожима беседу. То је проблем бесконачности и како се тај појам заснива у математици. Гавриловић истиче да се разни аспекти интуитивног појма бесконачности на различите начине сагледавају у различитим областима математике: на један начин у геометрији, на други у анализи и на трећи начин у Канторовој теорији скупова. Један пример бесконачности у геометрији је неограничена протежност праве у простору, у математичкој анализи то је рачун са бесконачно малим величинама – *инфинитезималама*, док Канторова теорија скупова уводи актуелну бесконачност и даје њену класификацију према кардиналним бројевима. Тим поводом Гавриловић на једном месту каже да је *"Инфинитезимални рачун најдубља и најлепша лирска песма о бесконачном"*, мада сматра да се до дубље суштине о бесконачном дошло тек строгим заснивањем основних појмова анализе, као што је непрекидност на пример. Ипак, према њему прави оквир за заснивање појма актуелне бесконачности у математици је Канторова теорија скупова. У том смислу парафразира Хилберта, сматрајући да је ова теорија *"рај из кога се проблем о бесконачном не може потиснути, већ да ће она и у будућности, за дуго време још, бити једна од најплоднијих области математичких спекулација."* Гавриловић је ту сасвим у праву. На другом месту Гавриловић се пита да ли континуум и бесконачност постоје у стварности. Сматра да је одговор на то питање негативан. Ако је реч о бесконачно малим величинама, потврду за своје мишљење налази у недељивости елементарних честица, односно постојању најмањих количина енергије (Планкових кваната). Дакле у реалном свету нема бесконачно малих величина, према томе нема ни хомогеног континуума. Да у физичком свету нема ни бесконачна великих величина, Гавриловић налази доказ у Ајнштајновим коначним космолошким моделима. Тако, Гавриловић на једном месту каже *„Математика на име не може рећи ово: простор је бесконачан; она нам не може рећи ни да је простор коначан“*. Заправо он сматра да је у математици најважније извођење или доказ, а да на тај начин добијене истине ипак ни у ком случају не прејудуцирају природу простора, без обзира шта су полазне претпоставке. У том смислу Гавриловићево становиште блиско је Хилбертовом формалистичком погледу, према којем је појам бесконачности у математици корисна али отклоњива фикција. Овај

став се види на још једном месту у беседи када каже: "Јер о аксиомима ми можемо мислити како хоћемо; ми за њих можемо рећи, да су они конвенција или, да су они судови а priori; ми можемо неке од њих примити а неке и одбацити, али кад се већ неки од њих приме, онда ће и у једном и у другом крилу оно, што се буде из њих развило, морати бити логички тачно."

Споменимо да је у овом спису Гавриловић покушавао, као и у неким ранијим радовима, да повеже, не може се рећи сасвим успешно, нека геометријска својства простора са кардиналном аритметиком Канторове теорије скупова. Истина, неко овде може видети наговештаје једне будуће дисциплине математичке логике, теорије модела, која ће се појавити тек неколико деценија касније, где ће се та питања расправљати на другим основама.

Занимљиво је да Гавриловићева беседа изгледа није имала неког нарочитог одјека у ондашњем београдском кругу математичара, мада није износила само ауторове погледе, већ и актуелне чињенице и погледе неких од најврсних савремених ауторитета из те области (Расела, Хилберта, Поенкареа, Картана, Едингтона и других). Један од разлога вероватно је тај што је већина београдских математичара, ако не и сви остали, била упућена на решавање и изучавање конкретних математичких проблема, пре свега из анализе. Једноставно, у Београду у то време за геометрију и основе (заснивање) математике било је мало интересовања. С обзиром да је прошло скоро девет деценија од појављивања, Гавриловићева беседа делује још увек занимљиво и фундирано и може бити актуелна за све оне који се занимају за питања из основа математике. Такође она показује да је Гавриловић био врло упућен у радове на ту тему аутора свог времена, не само у математици већ и у физици и филозофији.

Дигитализована сабрана дела Богдана Гавриловића налазе се у Виртуелној библиотеци Математичког факултета, <http://elibrary.matf.bg.ac.rs>.

Захвалница

Захваљујем се Др Милану Димитријевићу, научном саветнику Астрономске опсерваторије у Београду и организатору овог скупа, на позиву и предлогу за тему овог рукописа.

Више о Богдану Гавриловићу:

1. Р. Кашанин, "Др. Богдан Гавриловић", *Glasnik Matematičko-fizički i astronomski*, No. 4-5, t. 2, Загреб, 1947, 201-203.
2. Ј. Кеџић, "Serbian doctors of mathematics in the 19th century", *Publ. Inst. Math.* **38(52)**, 1985, 3-6.
3. М. Томић, *Математичке науке*, у књизи "Српска академија наука и уметности и развој науке и уметности у Срба", књ. 1, уред. Н. Пантић, САНУ, Београд, 1989.

4. *Сабрана дела Богдана Гавриловића*, приредио Ж. Мијајловић, Математички институт САНУ, Београд, 1996.
5. Ж. Мијајловић, *Богдан Гавриловић*, едиција: *Живот и дело српских научника*, т. 2, САНУ, 1997, 71-102.

INAUGURAL SPEECH OF BOGDAN GAVRILOVIĆ

The inaugural speech in Serbian Academy of Sciences of Bogdan Gavrilović, *The problem of space, hyper-space and continuum*, is considered.